



基于黏弹性理论的软基底排土场周边地表变形预测方法

王东 尹立 曹兰柱 付一鸣 张立国 张春会 丁春健

引用本文:

王东, 尹立, 曹兰柱, 等. 基于黏弹性理论的软基底排土场周边地表变形预测方法[J]. 煤炭科学技术, 2025, 53(6): 432–444.
WANG Dong, YIN Li, CAO Lanzhu. Prediction method of surface deformation around soft base dump based on viscoelastic theory[J]. Coal Science and Technology, 2025, 53(6): 432–444.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.12438/cst.2024-0313>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

露天矿背斜区内排土场边坡基底处理方式优选研究

Study on optimization of treatment methods for inclined basement of inner dump slope in anticline area of open-pit mine
煤炭科学技术. 2021, 49(2): 77–84 <https://doi.org/10.13199/j.cnki.cst.2021.02.010>

黄土沟壑基底排土场滑坡的空间演化机制

Spatial evolution mechanism of landslide in loess gully basement dump
煤炭科学技术. 2023, 51(3): 77–84 <https://doi.org/10.13199/j.cnki.cst.2021-0749>

巷道围岩蠕变特性及非定常蠕变模型研究

Study on creep characteristics and unsteady creep model of roadway surrounding rock
煤炭科学技术. 2021, 49(8): 67–72 <http://www.mtkxjs.com.cn/article/id/b9a081c9-c2e0-4c0c-9fe3-ef304a619021>

露天矿软岩复合边坡变形机理分析

Analysis of deformation mechanism of soft rock composite slope in open-pit mine
煤炭科学技术. 2021, 49(8): 108–113 <http://www.mtkxjs.com.cn/article/id/68376e51-31b8-45a1-84df-2af1d9a625c1>

露天矿内排土场近自然地貌重塑研究——以新疆黑山露天矿为例

Research on the reshaping of the near-natural landform of the internal dump for open-pit mine: a case study of Heishan Open-Pit Mine, Xinjiang, China
煤炭科学技术. 2022, 50(11): 213–221 <http://www.mtkxjs.com.cn/article/id/889e1b0d-6604-4c63-b582-c8ddcfd23a7f>

蠕变损伤煤岩分段增幅循环劣化机制

Subsection amplification cyclic deterioration mechanism of creep damaged coal
煤炭科学技术. 2025, 53(5): 64–76 <https://doi.org/10.12438/cst.2024-0164>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息



移动扫码阅读

王东,尹立,曹兰柱,等. 基于黏弹性理论的软基底排土场周边地表变形预测方法[J]. 煤炭科学技术, 2025, 53(6): 432-444.

WANG Dong, YIN Li, CAO Lanzhu, *et al.* Prediction method of surface deformation around soft base dump based on viscoelastic theory[J]. Coal Science and Technology, 2025, 53(6): 432-444.

基于黏弹性理论的软基底排土场周边地表变形预测方法

王东¹, 尹立¹, 曹兰柱¹, 付一鸣², 张立国¹, 张春会³, 丁春健⁴

(1. 辽宁工程技术大学矿业学院, 辽宁 阜新 123000; 2. 本钢矿业歪头山铁矿, 辽宁 本溪 117000; 3. 河北科技大学建筑工程学院, 河北 石家庄 050000; 4. 国能宝日希勒能源有限公司, 内蒙古 呼伦贝尔 021000)

摘要: 针对软弱基底排土场堆载引起的周边地表变形问题, 从层状弹性体系理论出发, 深入探讨了变形现象的机理与影响。通过运用微积分思想, 将排土场荷载微分, 并对周边土体的作用进行了叠加, 结合基底表面应力边界条件和层间界面连续条件, 引入了广义 Kelvin 三轴蠕变模型, 以更精确地描述软弱基底的变形特性, 从而推导出一种具有流变特性的黏弹性基底排土场周边地表变形解法。选择了本钢集团歪头山铁矿下盘排土场作为案例进行分析, 通过计算预测排土场堆载作用下层状黏弹性基底地表变形情况, 得到了一系列关于地表变形的定量数据, 可以看出排土场周边高铁线墩台沉降 u_z 和相邻墩台沉降差 Δu_z 会随着时间演化逐渐增大, 后趋于平缓; 排土场与高铁线并行段沉降为 2.08 mm, 高铁离开排土场并行范围最大相邻墩台沉降差为 0.006 mm/m。与现场监测数据进行对比分析后发现, 地表变形解析结果与实际情况基本吻合, 从而验证了黏弹性基底排土场周边地表变形解法的有效性和合理性, 且解析数值均低于规范阈值。在进一步的研究中, 通过对影响排土场周边地表变形因素(边坡高度、边坡角、地表距离和时间)分析, 发现了一些重要的规律性特征: 排土场距离坡脚越远, 周边地表变形越小, 呈现出明显的反比例关系; 边坡高度和角度越大, 地表变形越明显; 地表变形随着排土场施工时间演化, 在短时间内达到峰值, 之后趋于稳定。研究结果为理解软弱基底排土场堆载引起的地表变形规律提供了理论依据和实践指导, 同时, 所提出的解决方案为类似工程项目中的地表变形管理提供了新的思路和方法, 有望在工程实践中取得积极的应用效果。

关键词: 露天矿排土场; 层状基底; 蠕变; 黏弹性; 周边地表变形

中图分类号: TD824

文献标志码: A

文章编号: 0253-2336(2025)06-0432-13

Prediction method of surface deformation around soft base dump based on viscoelastic theory

WANG Dong¹, YIN Li¹, CAO Lanzhu¹, FU Yiming², ZHANG Ligu¹, ZHANG Chunhui³, DING Chunjian⁴

(1. College of Mining, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China; 2. Waitoushan Iron Mine, Benxi Iron & Steel (Group) Mining Co., Ltd., Benxi 117000, China; 3. College of Civil Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050000, China; 4. Guoneng Baorishile Energy Co., Ltd., Hulunbuir 021000, China)

Abstract: Addressing the challenge of surrounding surface deformation induced by soil discharge field pile loads in weak substrates, this study delves into the mechanisms and impacts of such deformations extensively, drawing from the theory of laminar elastic systems. Employing calculus principles to differentiate the soil discharge field load and overlay the effects on the surrounding soil, coupled with considerations of substrate surface stress boundary conditions and interlayer interface continuity, the study introduces the generalized Kelvin

收稿日期: 2024-03-13

策划编辑: 朱恩光

责任编辑: 陈思成

DOI: 10.12438/cst.2024-0313

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52374124); 辽宁省国际科技合作计划资助项目(2022JH2/10700004); 辽宁工程技术大学学科创新团队资助项目(LNTU20TD-01)

作者简介: 王东(1978—), 男, 辽宁法库人, 教授, 博士。E-mail: lntu_wd@163.com

通讯作者: 尹立(1995—), 男, 山西朔州人, 博士研究生。E-mail: azhuang_001@163.com

triaxial creep model to more precisely characterize the deformation traits of weak substrates. Consequently, a methodology for addressing peripheral ground surface deformation of viscoelastic substrate soil discharge fields with rheological characteristics is derived. For the investigation, the discharging yard of the lower plate of Crooked Head Mountain Iron Mine of Bensteel Group is selected as a case study. A series of quantitative data is obtained through calculations and predictions of surface deformation on layered viscoelastic substrates under pile load actions in the discharging yard. It is observed that the settlement of piers around the discharging yard and the variation in settlement between neighboring piers gradually increase with time evolution, eventually reaching a stable state. Furthermore, in parallel sections, the settlement of the discharging yard and high-speed rail lines is 2.5 and 2.3 times respectively. The settlement in the parallel section is measured at 2.08 mm, with the maximum settlement difference of adjacent piers being 0.006 mm/m. Comparative analysis with on-site monitoring data indicates close alignment between the surface deformation analysis results and actual conditions, thereby validating the efficacy and soundness of the viscoelastic substrate's surface deformation solution around the discharging field. Notably, the analyzed values remain below normative thresholds. Further examination reveals key patterns in factors influencing surface deformation around earth displacement fields (such as slope height, angle, surface distance, and time). Notably, the distance of the earth displacement field from the slope's foot inversely correlates with surrounding surface deformation, while greater slope height and angle exacerbate deformation. Additionally, surface deformation evolves over construction time, peaking quickly before stabilizing. Overall, the findings furnish a theoretical underpinning and practical guidance for comprehending and mitigating surface deformation caused by soft substrate disposal site pile loads. The proposed solutions offer novel insights and methods for managing surface deformation in analogous projects, with the potential for positive application in engineering practice.

Key words: open-pit mine dump; layered basement; creep; viscoelasticity; surrounding surface deformation

0 引 言

为了贯彻我国生态文明建设和高质量发展政策,露天矿作为能源消费结构的重要组成部分,必须在发展过程中实现绿色、安全及高效。在露天矿区,外排土场是必不可少的场所,用于排放露天矿开采过程中产生的大量土石方。为了减少土地资源占用,通常采用增高扩容方式最大限度地利用外排场地。然而,这种做法往往会导致排土场的稳定性下降,周边地表变形加剧。尤其当排土场周边存在高速铁路、公路等刚性建构筑物时,变形引发的安全问题就变得更加突出,必须引起足够的重视。

国内外许多专家学者在解决土体变形问题方面采用了层状弹性力学理论,并做出了许多创新性的理论推导。TERASAWA 等^[1]、IX^[2]、ACUM 等^[3]、XPYCTAJIEB 等^[4]、DE 等^[5]不同的理论方法对双层和三层弹性体系在荷载作用下的应力和位移变形等问题进行了深入研究和分析,并提出了相应的理论公式和计算程序。国内学者朱照宏等^[6]将 Love 位移函数引入到高阶矩阵代数法中进行分析,求出基于单个圆形垂直均布荷载作用下双层、三层弹性体系解析解。吴晋伟^[7]对多层弹性体系进行了应力与位移分析,得出存在于多层体系中的应力与位移的计算公式,并编制了多层路面中的应力与位移计算程序。梁锡三^[8]以层间的等效代换为基础,提出了圆形多层体系在竖向均布荷载作用下的一些常用坐标点的竖向位移、竖向应力的解析方法。王

凯^[9-13]采用递推回代法,完成了多层弹性体系应力与位移分析。同时,姜朋明^[14]、支喜兰等^[15]还采用了传递矩阵法、黏弹性层状地基轴对称问题等不同的方法进行了研究。这些研究为计算地表变形方法提供了解析基础。也有许多学者采用理论推导与数值模拟相结合的方法研究基底土体力学特性。吕惠卿等^[16]结合宏、细观力学对弹性层状体系理论进行综述。杨国良等^[17]利用层状弹性体系理论和冲击荷载沿路面结构下传扩散的特点建立了路表变形响应与模量反算模型。艾智勇等^[18]通过推导单层黏弹性介质的解析层元解,得到多层黏弹性体系总刚度矩阵并分析了黏弹性系数对路基沉降的影响。阳恩慧等^[19]推导了直角坐标系下的三维多层弹性层状体系静力学数值解法,并借助 ABAQUS 模拟验证了其合理性。刘光伟等^[20]通过蠕变模型对排土场填方体细粒土质砂蠕变参数进行反演,发现在稳态蠕变阶段中数值计算与现场监测结果相吻合。毕仲辉等^[21]基于层状地基模型,通过地震动输入方法,发现层状边坡会产生更大的塑性应变,且动力安全系数更小。曹博等^[22]通过建立排土场沉降蠕变理论模型,得到了填方土蠕变沉降方程和下沉速度系数,和 Burgers 黏弹性蠕变模型模拟结果具有较好的一致性。秦哲等^[23]基于弹黏塑性理论建立了一种新型非线性蠕变损伤模型,该模型既能反映整个蠕变过程中损伤演化规律,还能准确描述加速蠕变阶段非线性变形规律。周瑞鹤等^[24]基于分数阶导数引入黏塑性蠕变启动元件,建立的非定常分数阶黏弹塑性卸荷蠕

变模型,可较好表征该类岩石的蠕变特征。

在现有的研究中,大多数学者都集中于针对均布载荷作用下的地基弹性变形解法进行研究,虽然也有一些学者采用了黏弹性解法进行求解,但对于像排土场这类三角或梯形载荷作用下的土体黏弹性变形,尚未建立可推广的成型解法。为此,笔者首先基于层状弹性力学理论,推导了层状弹性排土场周边地表变形预测方法,然后引入广义 Kelvin 三轴蠕变模型,推导了具有流变特性的软弱基底排土场周边地表变形解析预测方法,为排土场周边土体变形预测、排土场设计以及周边设施的安全评价提供了科学手段。

1 水平层状基底排土场周边地表变形黏弹性解法

在工程实践中,通常排土场基底土体在受到荷载作用时,初期会表现出近似线性弹性形变,这意味着土体会迅速恢复原状,没有持久的变形。然而,随着荷载的持续作用,逐渐观察到基底土体开始出现明显的持久性变形,这表现为土体的流变特性。弹性解法虽然能够很好地描述土体的瞬时响应,但它

们无法准确捕捉基底土体的流变行为和时效性变形。

因此,在考虑排土场周边地表变形时,笔者首先考虑基底层状弹性解法,再引入黏弹性本构模型,以准确地描述基底土体的流变特性,更全面地理解和预测排土场基底土体的复杂行为。通过推导排土场周边地表的黏弹性解法,能够更好地理解和分析变形的时效性,这不仅在理论上具有重要意义,还对实际工程应用具有重要价值。

1.1 水平层状基底排土场周边地表变形弹性解法

排土场基底由多层不同岩性和厚度的土体组成,多可将其视为层状弹性体系,其中各土层的厚度、弹性模量和泊松比分别为 h_i 、 E_i 、 μ_i ($i=1, 2, \dots, N-1$)。当基底为半无限弹性空间体时,其为 $N=1$ 的特例。排土场荷载空间形态多为梯形台拟柱体^[25],与弹性基底都对称通过排土场中心的某一轴。因此,轴对称弹性体内仅产生对称于该轴的应力和位移分量,可视为空间轴对称问题。通过建立柱坐标系 $r\theta z$,可以方便地描述应力和位移,排土场与层状基底力学模型如图 1 所示,并用 *Lame-Navier* 方程式^[26]求解空间轴对称弹性力学变形问题。

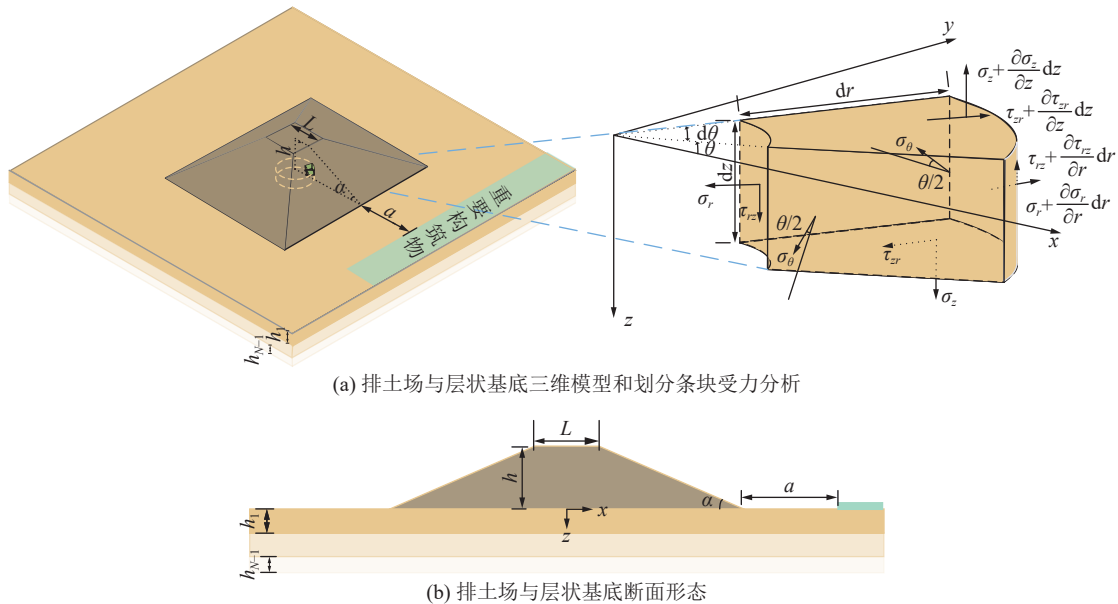


图 1 排土场与层状基底力学模型

Fig.1 Mechanical model of dump and layered basement

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子;

e 为总应变; $e = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$, $m; u, v, w$ 分别为 r, θ, z 方向的位移; ε_r 为 r 方向的正应变; ε_θ 为 θ 方向的正应变; ε_z 为 z 方向的正应变。

处于轴对称情况下,设调和函数 $\Phi = \Phi(r, z)$, $\partial \Phi / \partial \theta = 0$, 当 Φ 满足重调和方程:

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (2)$$

则方程式 (1) 的解, z 方向位移分量的表达式^[26] 为

$$w = \frac{1+\mu}{E} \left[2(1-\mu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \quad (3)$$

式中: E 为弹性模量, MPa; μ 为泊松比。

排土场基底成层状分布, 对于其中某一 i 土层, 运用汉克尔积分变换, 将式 (2) 两边各乘 $rJ_0(\xi r)$ 并由 $0 \sim \infty$ 对 r 求积分, 可得

$$\int_0^\infty r \nabla^4 \Phi J_0(\xi r) dr = \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 \int_0^\infty r \Phi J_0(\xi r) dr = \left(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 \bar{\varphi}(\xi, z) = 0 \quad (4)$$

式中: $J_0(\xi r)$ 为 0 阶第一类贝塞尔。

重调和方程式 (2) 转化为常微分方程, 解得:

$$\bar{\varphi}(\xi, z)_i = \left[(A_i + B_i z) e^{-\xi z} + (C_i + D_i z) e^{\xi z} \right] \quad (5)$$

式中: $A_i^{(0)}, B_i^{(0)}, C_i^{(0)}, D_i^{(0)}$ 分别为积分常数。

根据汉克尔积分变换得逆变换式, 由式 (5) 可得:

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \left[(A^{(0)} + B^{(0)} z) e^{-\xi z} + (C^{(0)} + D^{(0)} z) e^{\xi z} \right] \xi J_0(\xi r) d\xi \quad (6)$$

将式 (5) 中调和函数 Φ 的常微分解 $\bar{\varphi}(r, z)$ 对 z 的各阶导数代入式 (6), 并令式中 $A^{(0)} = \xi^{-2} A^{(1)}$, $B^{(0)} = \xi^{-3} B^{(1)}$, $C^{(0)} = \xi^{-2} C^{(1)}$, $D^{(0)} = \xi^{-3} D^{(1)}$, 即得到任意排土场荷载作用下 N 层基底内第 i 层土层应力和位移分量表达式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ri} = - \int_0^\infty \left\{ \left[A_i^{(1)} - (1 + 2\mu_i - \xi z) B_i^{(1)} \right] e^{-\xi z} - \left[C_i^{(1)} + (1 + 2\mu_i + \xi z) D_i^{(1)} \right] e^{\xi z} \right\} \xi J_0(\xi r) d\xi + \frac{U_{li}}{r} \\ \sigma_{\theta i} = 2\mu_i \int_0^\infty \left(B_i^{(1)} e^{-\xi z} + D_i^{(1)} e^{\xi z} \right) \xi J_0(\xi r) d\xi - \frac{U_{li}}{r} \\ \sigma_{zi} = \int_0^\infty \left\{ \left[\xi A_i^{(1)} + (1 - 2\mu_i + \xi z) B_i^{(1)} \right] e^{-\xi z} - \left[\xi C_i^{(1)} - (1 - 2\mu_i - \xi z) D_i^{(1)} \right] e^{\xi z} \right\} \xi J_0(\xi r) d\xi \\ \tau_{zri} = \int_0^\infty \xi \left\{ \left[\xi A_i^{(1)} - (2\mu_i - \xi z) B_i^{(1)} \right] e^{-\xi z} + \left[\xi C_i^{(1)} + (2\mu_i + \xi z) D_i^{(1)} \right] e^{\xi z} \right\} J_1(\xi r) d\xi \\ u_{zi} = - \frac{1 + \mu_i}{E_i} \int_0^\infty \left\{ \left[A_i^{(1)} + (2 - 4\mu_i + \xi z) B_i^{(1)} \right] e^{-\xi z} + \left[C_i^{(1)} - (2 - 4\mu_i - \xi z) D_i^{(1)} \right] e^{\xi z} \right\} J_0(\xi r) d\xi \\ u_{ri} = \frac{1 + \mu_i}{E_i} U_{li}, U_{li} = \int_0^\infty \left\{ \left[A_i^{(1)} - (1 - \xi z) B_i^{(1)} \right] e^{-\xi z} - \left[C_i^{(1)} + (1 + \xi z) D_i^{(1)} \right] e^{\xi z} \right\} J_1(\xi r) d\xi \end{array} \right. \quad (7)$$

式中: $A_i^{(1)}, B_i^{(1)}, C_i^{(1)}, D_i^{(1)}$ 为积分变量的函数。

令 $A_i^{(1)} = A_i \bar{q}(\xi)$, $B_i^{(1)} = B_i \bar{q}(\xi)$, $C_i^{(1)} = C_i \bar{q}(\xi)$, $D_i^{(1)} = D_i \bar{q}(\xi)$, 其中 q 为作用在弹性体系表面的圆形

均布垂直荷载的荷载集度, 荷载圆半径为 δ , 当受垂直均布荷载作用时, $\bar{q}(\xi) = q \int_0^\delta r J_0(\xi r) dr$, 引入新积分变量 $x = \xi \delta$ 。于是有:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ri} = -q \int_0^\infty \left\{ \left[A_i - \left(1 + 2\mu_i - \frac{z}{\delta} \right) B_i \right] e^{-\frac{z}{\delta} x} - \left[C_i + \left(1 + 2\mu_i + \frac{z}{\delta} \right) D_i \right] e^{\frac{z}{\delta} x} \right\} J_0\left(\frac{r}{\delta} x\right) J_1(x) dx + U_i \\ \sigma_{\theta i} = 2\mu_i q \int_0^\infty \left(B_i e^{-\frac{z}{\delta} x} + D_i e^{\frac{z}{\delta} x} \right) J_0\left(\frac{r}{\delta} x\right) J_1(x) dx + U_i \\ \sigma_{zi} = -q \int_0^\infty \left\{ \left[A_i + \left(1 - 2\mu_i + \frac{z}{\delta} \right) B_i \right] e^{-\frac{z}{\delta} x} - \left[C_i - \left(1 - 2\mu_i - \frac{z}{\delta} \right) D_i \right] e^{\frac{z}{\delta} x} \right\} J_0\left(\frac{z}{\delta} x\right) J_1(x) dx \\ \tau_{zri} = q \int_0^\infty \left\{ \left[A_i - \left(2\mu_i - \frac{z}{\delta} \right) B_i \right] e^{-\frac{z}{\delta} x} + \left[C_i + \left(2\mu_i + \frac{z}{\delta} \right) D_i \right] e^{\frac{z}{\delta} x} \right\} J_1\left(\frac{z}{\delta} x\right) J_1(x) dx \\ u_{zi} = - \frac{1 + \mu_i}{E_i} q \delta \int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{r}{\delta} x\right) J_1(x)}{x} \left\{ \left[A_i - \left(2 - 4\mu_i + \frac{z}{\delta} \right) B_i \right] e^{-\frac{z}{\delta} x} + \left[C_i - \left(2 - 4\mu_i - \frac{z}{\delta} \right) D_i \right] e^{\frac{z}{\delta} x} \right\} dx \\ u_{ri} = - \frac{1 + \mu_i}{E_i} U_i, U_i = q \int_0^\infty \frac{J_1\left(\frac{r}{\delta} x\right) J_1(x)}{\frac{r}{\delta} x} \left\{ \left[A_i - \left(1 - \frac{z}{\delta} \right) B_i \right] e^{-\frac{z}{\delta} x} - \left[C_i + \left(1 + \frac{z}{\delta} \right) D_i \right] e^{\frac{z}{\delta} x} \right\} dx \end{array} \right. \quad (8)$$

排土场垂直荷载作用下, 地表面应力边界条件通过汉克尔积分变换得:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 + (1 - 2\mu_1) B_1 - C_1 + (1 - 2\mu_1) D_1 = -1 \\ A_1 - 2\mu_1 B_1 + C_1 + 2\mu_1 D_1 = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

在排土场荷载作用下, 假设排土场基底内部土层界面完全连续, 即 $\sigma_{zi} = \sigma_{zi+1}$, $\tau_{zi} = \tau_{zi+1}$, $u_{ri} = u_{ri+1}$, $u_{zi} = u_{zi+1}$ 。设有 N 层基底土, 第 N 层基底土视作半无限空间体, 则上述式中 i 变为 $N-1$, 即:

$$\begin{cases} \left[A_{N-1} + \left(1 - 2\mu_{N-1} + \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_{N-1} \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} - C_{N-1} + \left(1 - 2\mu_{N-1} - \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) D_{N-1} = \left[A_N + \left(1 - 2\mu_N + \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_N \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} \\ \left[A_{N-1} - \left(2\mu_{N-1} - \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_{N-1} \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} + C_{N-1} + \left(2\mu_{N-1} + \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) D_{N-1} = \left[A_N - \left(2\mu_N - \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_N \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} \\ m_k \left\{ \left[A_{N-1} - \left(1 - \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_{N-1} \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} - C_{N-1} - \left(1 + \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) D_{N-1} \right\} = \left[A_N - \left(1 - \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_N \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} \\ m_k \left\{ \left[A_{N-1} + \left(2 - 4\mu_{N-1} + \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_{N-1} \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} + C_{N-1} - \left(2 - 4\mu_{N-1} - \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) D_{N-1} \right\} = \left[A_N + \left(2 - 4\mu_N + \frac{z_{N-1}}{\delta} x \right) B_N \right] e^{-2\frac{z_{N-1}}{\delta} x} \end{cases} \quad (10)$$

式中: $z_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $m_k = \frac{1+\mu_i}{1+\mu_{i+1}} \frac{E_{i+1}}{E_i}$ 。N 层弹性体系有 N-1 个层间界面, 每个界面有 4 个层间结合条件, 再加上 2 个表面应力边界条件 (式 9) 和层间连续条件 $A_N=C_N=0$, 一共可建立 4N 个线性代数方程式, 这样就可以求得系数 A_i 、 B_i 、 C_i 和 D_i ($i=1, 2, \dots, N-1$), 排土场基底通常可以简化看成单层和多层情况, 以下为具体求解过程。

基底为单层 ($N=1$) 时, 即为弹性半空间体。由基底内部土层界面连续条件得 $C_N=C_1=0$, $D_N=D_1=0$, 由式 (9) 得 $A_1=-2\mu_1$, $B_1=-1$ 。圆形均布垂直总荷载为 $\pi\delta^2 q$, 当圆心为 0, 作用点在 z 轴时, 零阶汉克尔变换式为 $\bar{q}(\xi) = q \frac{\delta}{\xi} J_1(\xi\delta)$ 。设一垂直集中力 Q 与圆形均

布垂直荷载相等, 即 $Q=\pi\delta^2 q$, 则当荷载圆半径 $\delta \rightarrow 0$ 并求极限, 垂直集中力 Q 的零阶汉克尔变换式为 $\bar{q}(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{Q J_1(\xi\delta)}{\pi\xi\delta} = \frac{Q}{2\pi}$ 。将排土场沿坡面竖向条分, 各微分段 $dx dy$ 均可视作作用于地表面的垂直集中力, 以此积分叠加, 所产生的地表位移 u_z 为

$$u_z = \frac{(1-\mu^2)D}{\pi E(L+a)} \left(\gamma h L - \frac{\gamma h^2}{2 \tan \alpha} \right) \quad (11)$$

式中: h 为边坡高度, m; α 为边坡角, ($^\circ$); L 为排土场坡顶平盘宽度, m; D 为排土场走向长度, m; a 为坡脚距地表 A 点距离, m; γ 为排弃物料容重, kN/m³。

当基底为多层时, 由式 (10) 层间接触面位移和应力连续条件以及式 (9) 地表边界条件构建的方程组解得地表弹性变形为

$$u_z = -\frac{(1+\mu_i)D}{E_i(L+a)} \left(\gamma h L - \frac{\gamma h^2}{2 \tan \alpha} \right) \int_0^\infty \left\{ \begin{aligned} & [A_i + (2-4\mu_i + \xi z_i) B_i] e^{-\xi z} \\ & + [C_i - (2-4\mu_i - \xi z_i) D_i] e^{\xi z} \end{aligned} \right\} J_0(\xi r) d\xi \quad (12)$$

1.2 基底土体黏弹性本构模型选取

排土场黏土基底蠕变行为表现出时变收敛的特征, 因此引入了描述土材料时变蠕变特性的广义开尔文模型。黏弹性模型通常由若干个胡克体 H 和黏滞体 N 组合而成。为准确描述排土场基底的蠕变特性, 笔者选用如图 2 中 2 个 Kelvin 模型串联而成的广义 Kelvin 模型。

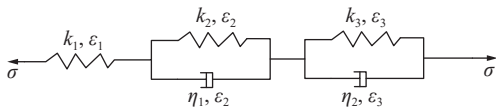


图 2 广义 Kelvin 模型元件

Fig.2 Element diagram of generalized Kelvin model

Kelvin 模型本构方程:

$$\frac{\eta}{K_1} \dot{\sigma} + \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \right) \sigma = K_2 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (13)$$

五单元广义 Kelvin 模型式:

$$\varepsilon(t) = \frac{2I}{9K} + \frac{\Delta\sigma}{3G^H} + \frac{\Delta\sigma}{3G_1^K} \left[1 - \exp\left(-\frac{G_1^K}{\eta_1} t\right) \right] + \frac{\Delta\sigma}{3G_2^K} \left[1 - \exp\left(-\frac{G_2^K}{\eta_2} t\right) \right] \quad (14)$$

蠕变柔量为

$$J(t) = \frac{1}{G^H} + \frac{1}{G_1^K} \left[1 - \exp\left(-\frac{G_1^K}{\eta_1} t\right) \right] + \frac{1}{G_2^K} \left[1 - \exp\left(-\frac{G_2^K}{\eta_2} t\right) \right] \quad (15)$$

式中: $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_3$, σ_1 为轴向应力, MPa, σ_3 为围压, MPa; I_1 为直角坐标系下第一应力不变量, MPa; K_1, K_2 为广义 Kelvin 模型体积模量, MPa; G^H 为广义 Kelvin 模型中胡克体剪切模量, MPa; G_1^K, G_2^K 为广义 Kelvin 模型中 Kelvin 体剪切模量, MPa; η_1, η_2 为广义 Kelvin 模型中 Kelvin 体黏滞系数, MPa · h。

广义 Kelvin 模型的剪切模量 G 为蠕变柔量的倒数, $G=1/J(t)$ 。

1.3 均质基底排土场周边地表变形黏弹性解法

当排土场基底 $N=1$ 时, 可视为半无限均质基底。土体变形参数泊松比、弹性模量^[27] 分别为

$$\mu = \frac{3K-2G}{6K+2G} \quad (16)$$

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad (17)$$

若在均质基底排土场上作用集中荷载 Q , 对柱坐标系下 Boussinesq 位移解做 Laplace 变换得:

$$u_z = \frac{\hat{Q}}{4\pi s \hat{G} R} \left[\frac{z_0^2}{R^2} + \frac{3\hat{K} + 4\hat{G}}{3\hat{K} + \hat{G}} \right] \quad (18)$$

式中: s 为复变量, S^{-1} 。

对广义 Kelvin 模型, 应变偏量张量 e_{ij} 为

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2G_1^K} \left[1 - e^{-\frac{G_1^K}{\eta_1} t} \right] + \frac{S_{ij}}{2G_2^K} \left[1 - e^{-\frac{G_2^K}{\eta_2} t} \right] + \frac{S_{ij}}{2G^H} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \hat{G} = \frac{1}{2s^2 J'(s)} = \left\{ \left[\frac{G_1^K G_2^K + G^H (G_1^K + G_2^K)}{G^H G_1^K G_2^K} \right] s - \left[\frac{s^2 \eta_1}{G_1^K (s\eta_1 + G_1^K)} + \frac{s^2 \eta_2}{G_2^K (s\eta_2 + G_2^K)} \right] \right\}^{-1} \\ \hat{K} = \frac{1}{3s^2 J^m(s)} = \frac{K}{s} \end{cases} \quad (20)$$

则集中力 Q 引起的地表变形:

$$u_z = \left\{ \frac{Q}{4\pi R s} \left[\frac{G_1^K G_2^K + G^H (G_1^K + G_2^K)}{G^H G_1^K G_2^K} \right] - \frac{Q}{4\pi R} \left[\frac{\eta_1}{G_1^K (s\eta_1 + G_1^K)} + \frac{\eta_2}{G_2^K (s\eta_2 + G_2^K)} \right] \right\} \left[\frac{z_0^2}{R^2} + 1 + 3 \left\{ \frac{3K \left[\frac{G_1^K G_2^K + G^H (G_1^K + G_2^K)}{G^H G_1^K G_2^K} \right] + 1}{-3K \left[\frac{s\eta_1}{G_1^K (s\eta_1 + G_1^K)} + \frac{s\eta_2}{G_2^K (s\eta_2 + G_2^K)} \right]} \right\} \right] \quad (21)$$

对式 (21) 做 Laplace 逆变换, 得到黏弹性均质基底表面作用一集中力 Q 的变形解答, 将排土场荷载微分, 叠加微分荷载对地表变形的作用, 可求得黏弹性均质基底地表变形表达式。

1.4 层状基底排土场周边地表变形黏弹性解法

将基底的柔度系数 $V(t)$ 代替弹性模量 E 表征黏弹性体的刚度特性, $V(t)=1/E(t)$ 。对于广义 Kelvin 模

式中: G^K 为广义开尔文模型开尔文体的剪切模量, MPa; G^H 为广义开尔文模型中胡克体的剪切模量, MPa。

通过蠕变柔量分量做 Laplace 变换得到体积模量 \hat{K} 和剪切模量 \hat{G} :

型的本构方程式 (13) 做 Laplace 变换和逆变换, 获得柔度系数:

$$V(t) = \frac{1}{K} \delta(t) + \frac{1}{\eta_1} \exp\left(-\frac{K_1}{\eta_1} t\right) + \frac{1}{\eta_2} \exp\left(-\frac{K_2}{\eta_2} t\right) \quad (22)$$

由弹黏性材料的应力与应变关系, 设 $G(t-\zeta) = (1+\mu)V(t-\zeta)$ [27], $V(t-\zeta)$ 为 $t-\zeta$ 时刻的柔度系数, ζ 为时间变量, 得到任意时刻 t 的地表变形表达式:

$$u_z(t) = -\frac{1+\mu_i}{L+a} \left(\gamma h L - \frac{\gamma h^2}{2 \tan \alpha} \right) \int_0^t G_i(t-\zeta) \int_0^\infty \left\{ [A_i - (2-4\mu_i + \xi \zeta) B_i] e^{-\xi \zeta} + [C_i - (2-4\mu_i - \xi \zeta) D_i] e^{\xi \zeta} \right\} J_0(\xi r) d\xi d\zeta \quad (23)$$

由基底表面边界条件及层间连续条件可得

$$\begin{aligned} \int_0^t G_i(t-\zeta) \int_0^\infty \left\{ [A_i + (2-4\mu_i + \xi H_i) B_i] e^{-\xi H_i} + [C_i - (2-4\mu_i - \xi H_i) D_i] e^{\xi H_i} \right\} J_0(\xi r) d\xi d\zeta = \\ \int_0^t G_{i+1}(t-\zeta) \int_0^\infty \left\{ [A_{i+1} + (2-4\mu_{i+1} + \xi H_i) B_{i+1}] e^{-\xi H_i} + [C_{i+1} - (2-4\mu_{i+1} - \xi H_i) D_{i+1}] e^{\xi H_i} \right\} J_0(\xi r) d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (24)$$

令 $G_i(t-\zeta) = G_i^E(t-\zeta) + G_i^V(t-\zeta)$, 其中上标 “E” 表示弹性, 上标 “V” 表示黏弹性。将含 $G_i^V(t-\zeta)$ 的积分部

分用梯形积分式表达。取两积分节点间足够小增量 dT [28], $dT=t/(t-1)$, m 为节点数, 于是:

$$\begin{aligned} \int_0^t G_i^E(t-\zeta) k_{i,z_i}^*(\zeta) d\zeta + dT \left\{ \frac{1}{2} G_i^V(\zeta_m) k_{i,z_i}^*(\zeta_1) + \frac{1}{2} G_i^V(\zeta_1) k_{i,z_i}^*(\zeta_m) + \sum_{k=2}^{m-1} G_i^V(t-\zeta_k) k_{i,z_i}^*(\zeta_k) \right\} = \int_0^t G_{i+1}^E(t-\zeta) k_{i+1,z_i}^*(\zeta) d\zeta + \\ dT \left\{ \frac{1}{2} G_{i+1}^V(\zeta_m) k_{i+1,z_i}^*(\zeta_1) + \frac{1}{2} G_{i+1}^V(\zeta_1) k_{i+1,z_i}^*(\zeta_m) + \sum_{k=2}^{m-1} G_{i+1}^V(t-\zeta_k) k_{i+1,z_i}^*(\zeta_k) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

其中,

$$k_{i,z_i}^* = \int_0^\infty \left\{ [A_i + (2-4\mu_i + \xi z_i) B_i] e^{-\xi z_i} + [C_i - (2-4\mu_i - \xi z_i) D_i] e^{\xi z_i} \right\} J_0(\xi r) d\xi \quad (26)$$

通过积分回代解出积分参量 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i , 从而

得到地表变形表达式 (23)。

2 工程应用

笔者以歪头山铁矿外排土场作为工程实例,将下盘排土场坡顶坡底视为矩形的梯形台,其东北侧临近高铁线,最小距离不足 50 m,经测量下盘排土场与高铁走向的并行长度约 1 300 m,排土场在 2020—2021 年 4 月进行排土工程作业,边坡高度由 128.31 m 增高至 164.67 m,边坡角提高 $4^{\circ} \sim 14^{\circ}$ 。在矿区地势近水平区域,与高铁并行范围内布设有 1 条 GNSS 监测线 XP-3(监测点编号为 X1~X3),其中 X1 监测点位于排土场坡脚处 ($a=0$ m),X2 监测点位于 G304 高速公路临近排土场一侧 ($a=20$ m),X3 监测点位于高铁线墩台附近 ($a=50$ m),监测点于 2021 年 4 月开展沉降监测。以监测频率 1 次/周监测到 2021 年 7 月底,之后监测频率为 1 次/月。现场平面图以及监测线剖面图如图 3 所示。以下盘排土场基底域内中心为原点 O,西北帮与高铁线并行方向为 y 轴,沉降值 u_z 、相邻墩台沉降差 Δu_z 为 z 轴,建立坐标系,工程示例如图 4 所示。

2.1 现状排土场周边地表变形解析

矿区排土场及基底的岩土体物理力学参数见表 1。运用本文层状基底排土场周边地表变形计算方法对排土场现状形态进行数值计算,判断排土场荷载对周边高铁及墩台影响是否达到相关规范^[29-30]标准(规范中,高铁属于无砟轨道,其绝对沉降值不应超过 20 mm,相邻墩台沉降差不应超过 5 mm,高架桥相邻墩台间隔为 25 m,即两墩台之间沉降差不应超过 0.2 mm/m)。

歪头山铁矿下盘排土场与高铁相距 $a=50$ m,排土场基底为黏土层和混合花岗岩层组成的双层黏弹性体 ($N=2$),黏土层厚度 H_1 约 5 m,混合花岗岩层可

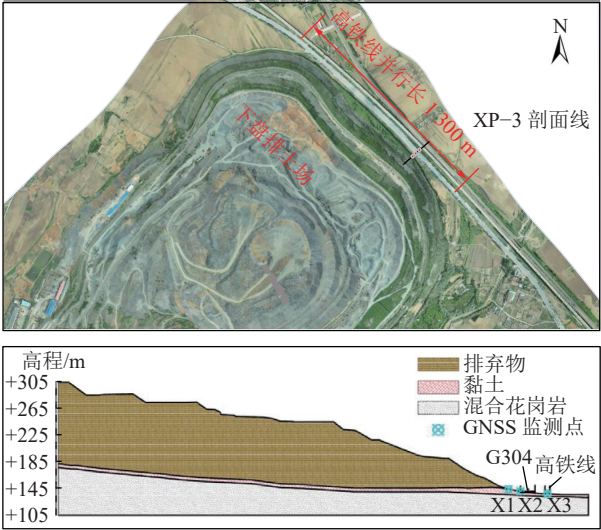


图 3 下盘排土场平面图及监测线剖面图
Fig.3 Footwall dump plan and monitoring line profile

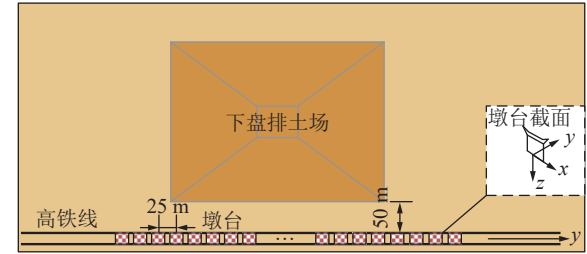


图 4 排土场与高铁线墩台相对位置示意
Fig.4 Settlement diagram of high-speed railway pier under the action of dump

视作半无限弹性空间体。当 $N=2$ 时, $C_N=C_2=0$, $D_N=D_2=0$,运用层状基底排土场周边地表变形黏弹性解析式 (23) 可求解出高铁及墩台受排土场影响的变形值。图 5 为高铁沉降 u_z 与时间 t 、距坡脚距离 a 的关系曲线,图 6 为高铁沉降值 u_z 、相邻墩台沉降差 Δu_z 与墩台位置关系曲线。

表 1 地表变形分析的土体物理力学参数

Table 1 Soil physical and mechanical parameters of surface deformation analysis

岩土	容重 $\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	弹性模量 E/MPa	泊松比 μ	K/MPa	G^H/MPa	G_1^K/MPa	$\eta_1/(\text{MPa} \cdot \text{h})$	G_2^K/MPa	$\eta_2/(\text{MPa} \cdot \text{h})$
排弃物	18.6	500.0	0.200	—	—	—	—	—	—
基底黏土	16.5	46.3	0.258	1.02	3.12	0.03	2.70	0.06	0.47
花岗岩	26.1	644 000.0	0.180	—	—	—	—	—	—

可以看出排土场周边地表变形随着时间 t 演化逐渐增大后趋于稳定,同时距坡脚距离增大而减小;高铁线墩台沉降 u_z 和相邻墩台沉降差 Δu_z 会随着时间演化逐渐增大,后趋于平缓;高铁在 $-650 \sim +650$ m

段沉降 $u_z=2.08$ mm,高铁离开排土场并行范围 (即 ≤ -650 m 和 $\geq +650$ m),在 ± 775 m 时最大相邻墩台沉降差 $\Delta u_{z\text{max}}=0.006$ mm/m。因此,歪头山铁矿下盘现状排土场周边地表变形与高铁相邻墩台沉降差均

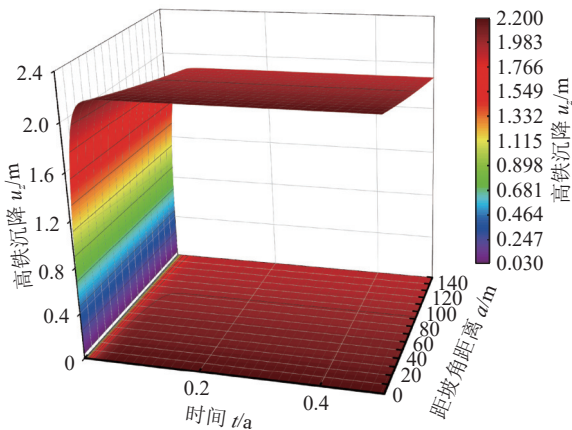


图 5 地表变形与时间和距坡脚距离的关系

Fig.5 Relation between surface deformation and time and distance from slope foot

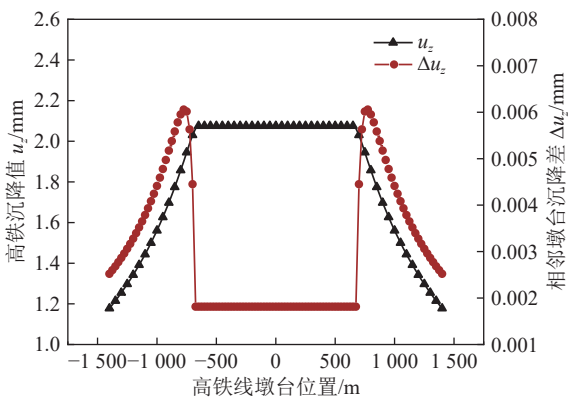


图 6 高铁沉降值、相邻墩台沉降差与墩台位置关系

Fig.6 High railway settlement value, adjacent pier settlement difference and pier position relationship

低于规范阈值,处于安全稳定状态。

2.2 地表变形解析解与监测系统数据对比

由 XP-3 监测线上 X1~X3 监测点的沉降曲线(图 7),可以看出随着排土场建设完成后,3 个监测点的变形值均不断增加,由于工程荷载非线性增加,变形增加无明显规律,直至 2021 年 6 月底,排土场

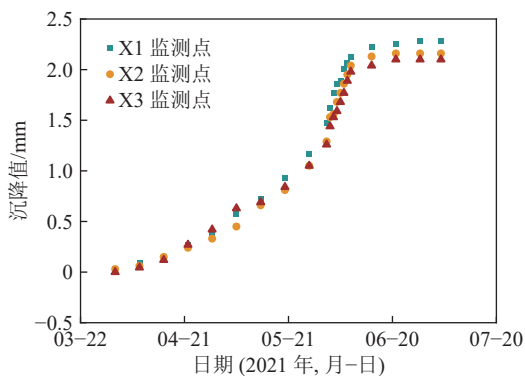


图 7 X1~X3 监测点监测结果

Fig.7 Monitoring results of monitoring points X1-X3

周边地表沉降基本停止。运用本文地表变形解析方法,获得 3 个监测点位置地表沉降随时间的演化曲线,并加入监测数据如图 8 所示。可以看出,排土场周边地表沉降随时间演化而增长,在 1~2 个月内达到峰值后趋于稳定,对比监测数据,监测点位置的地表沉降预测值与监测数据基本吻合,误差低于 1%。

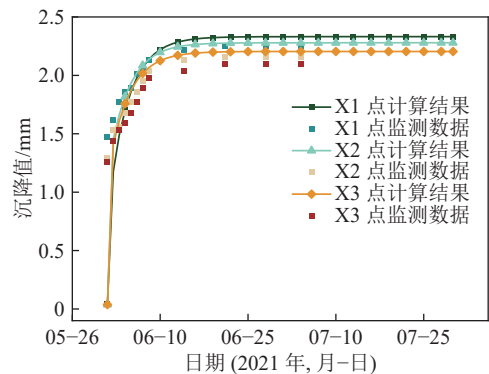


图 8 X1~X3 监测点位置地表变形演化预测

Fig.8 Prediction of surface deformation evolution at monitoring points X1-X3

随着排土场工程的发展,注意到基底土体在短期加载下会表现为近似瞬时的弹性变形,然后逐渐进入蠕变阶段,直至稳定在工程建设阶段性结束后的一段时间内。目前,由监测系统表明现有排土场周边地表土体变形满足相关规范的要求。

然而,考虑到实际现场条件的多样性,不仅要满足规范要求,还要对排土场进行增高和扩容的设计。因此,为了更好地指导排土场形态的设计,本文运用黏弹性解法,对排土场周边地表变形进行了预测和分析。这种方法更全面地了解了排土场周边地表变形的时空演化,以及边坡形态等重要参数对这些变形的影响。这不仅有助于设计更安全的排土场,还可以提供实际工程建设的重要指导。

2.3 排土场周边地表变形预测与时空演化规律分析

在选定下盘排土场的合理边坡高度为 120~180 m 和边坡角度为 $10^\circ \sim 20^\circ$ 后,针对不同的边坡高度和边坡角度,通过图 9 和图 10 的观察,发现地表变形与距离呈现出反比例关系。此外,随着边坡高度和角度的增加,地表变形也显著增加。

另外,在不同的边坡高度和边坡角度下,排土场的作用导致黏弹性基底地表变形,如图 11 所示,可以观察到随着时间的推移,地表变形呈现出持续增

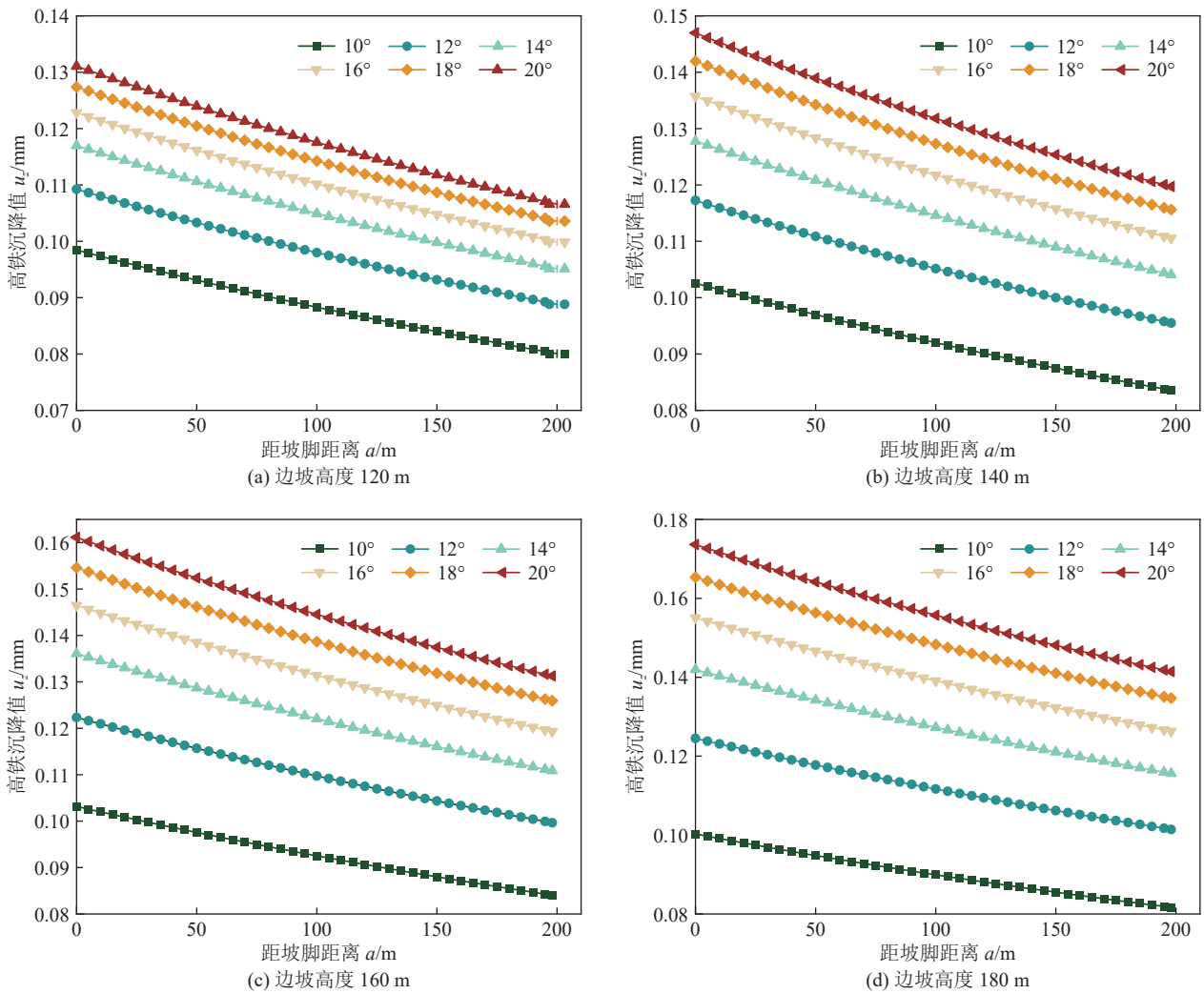
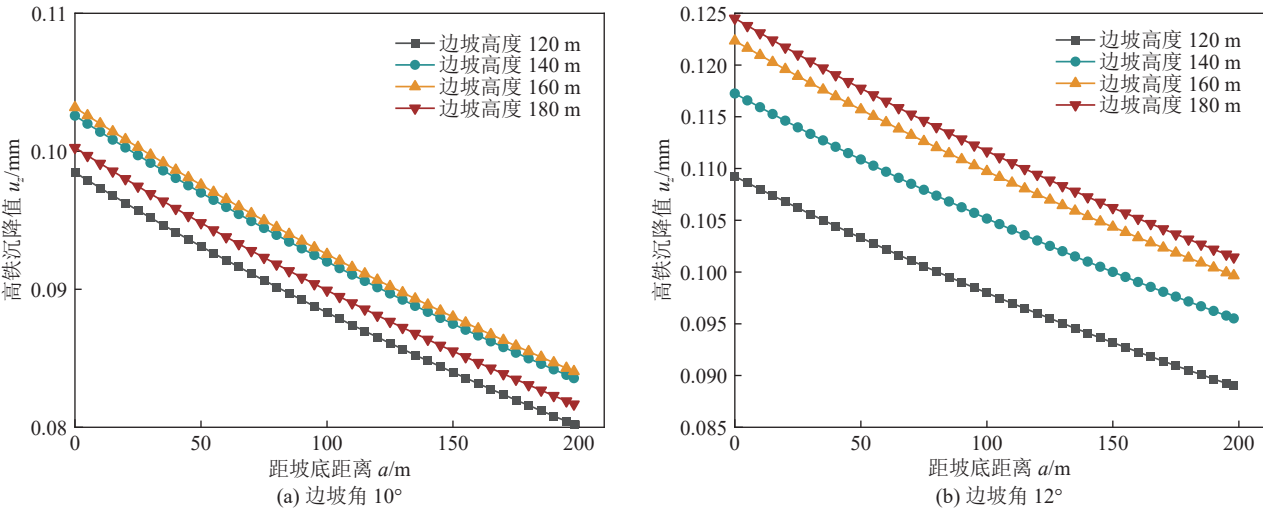


图 9 不同边坡高度排土场作用下周边地表变形规律

Fig.9 Surrounding surface deformation law of dump with a different slope height

加的趋势。在经过 1~2 个月,土体变形趋于稳定。当排土场高度达到 333 m,且边坡角度为 20°时,土体变形值接近规范阈值,表明不宜继续增加排土场的高度。

从时空角度考察,随着排土场工程的不断进行,地表变形随时间的演化表现出多种趋势,并最终趋于稳定。此外,不同基底高度和不同边坡角度对地表变形产生不同的影响,这些影响在空间上表现出



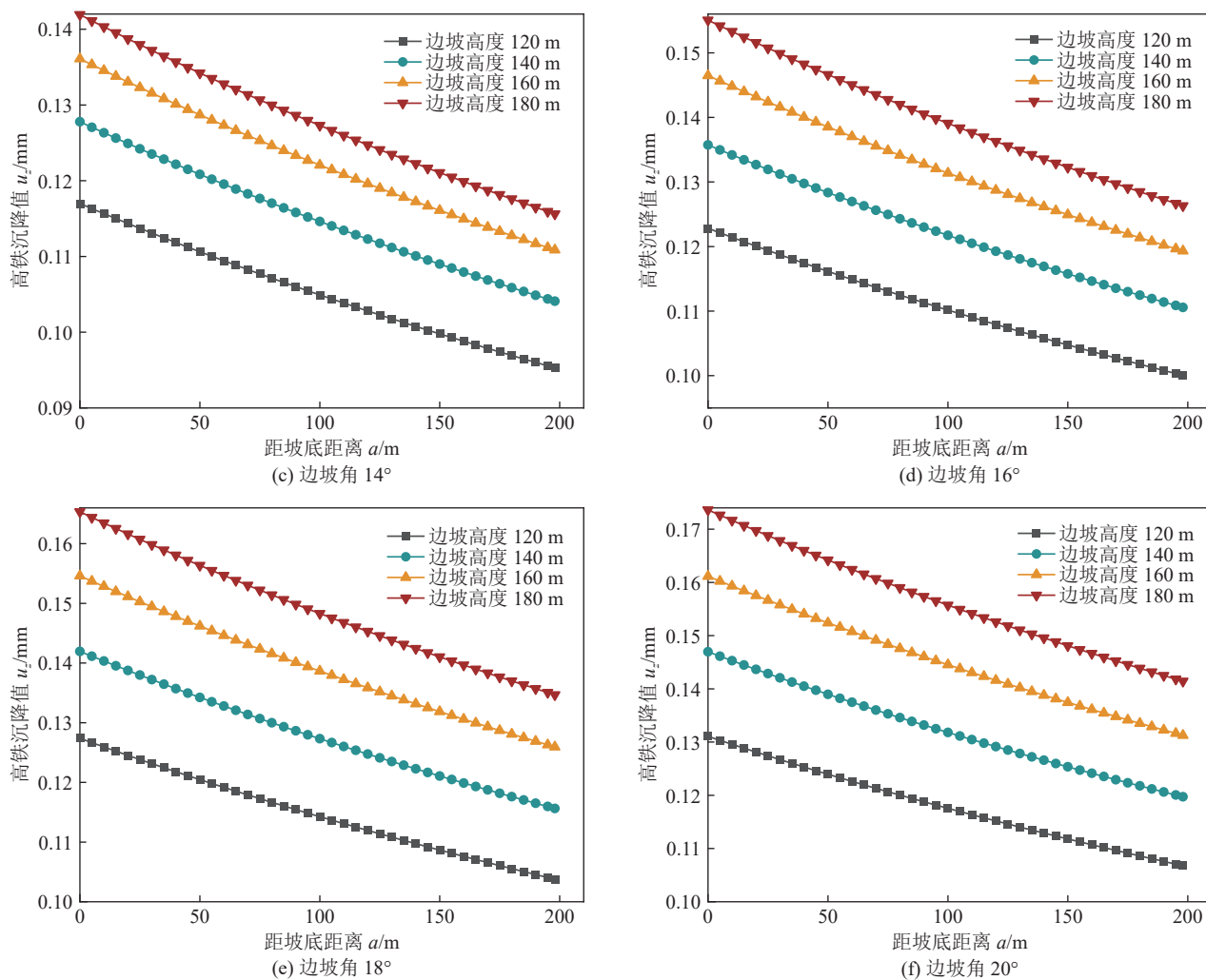
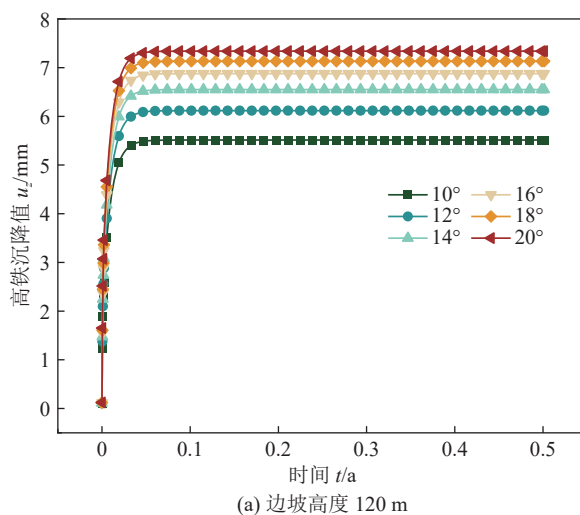


图 10 不同边坡角排土场作用下周边地表变形规律

Fig.10 Surrounding surface deformation law of dump with different slope angles

明显的特征,即距离坡脚越远,地表变形越小,而边坡高度和角度越大,地表变形越显著。因此,这些研究结果为实际工程提供了重要的指导,建议选择较

小的边坡高度和角度以减小地表变形,同时需谨慎控制排土场的作用时间,以避免超过土体的承载能力,确保工程的安全和稳定。



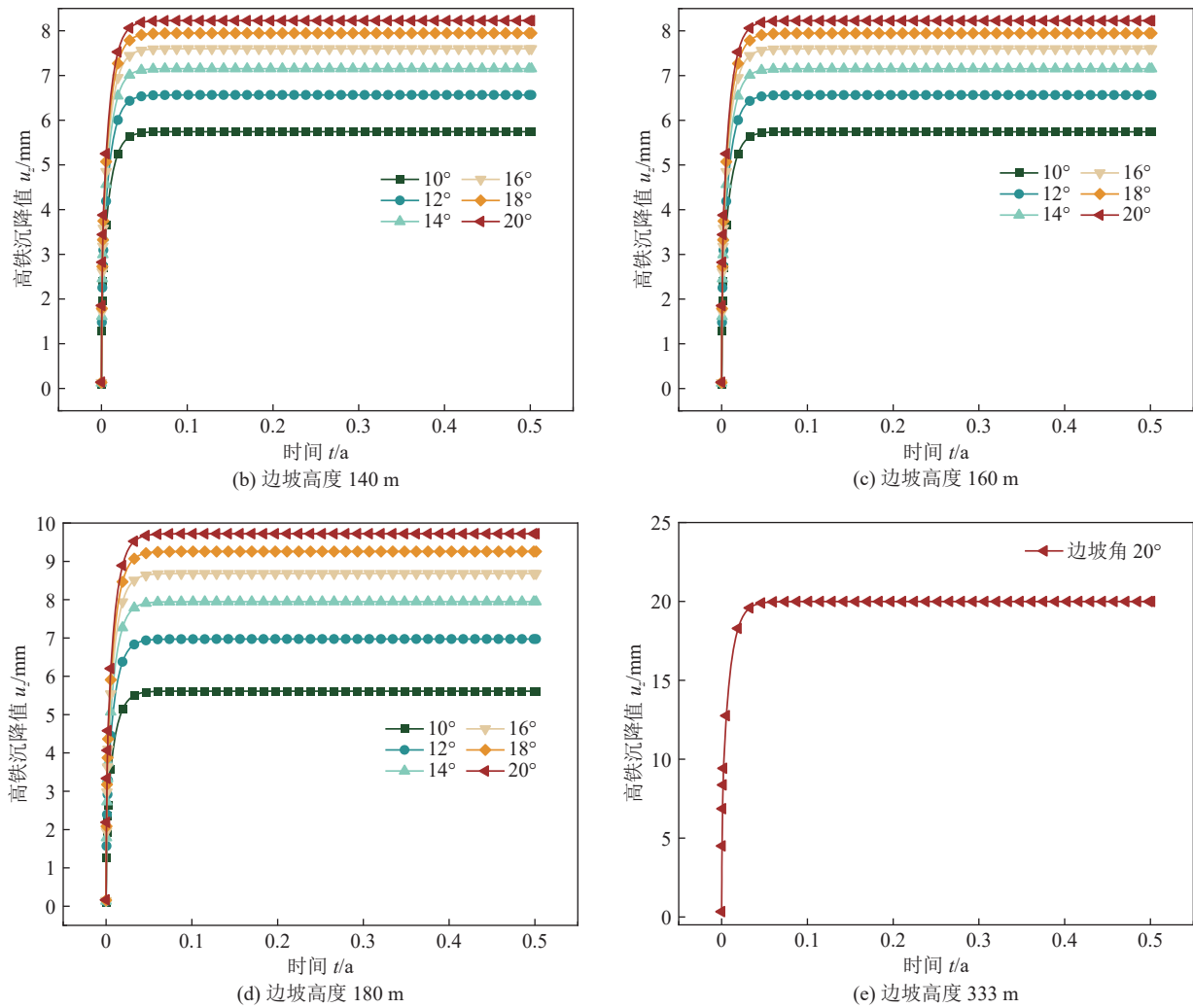


图 11 黏弹性基底排土场周边地表变形随时间变化规律

Fig.11 Surface deformation around dump with viscoelastic basement changes with time

3 结 论

1) 借助层状弹性理论,将微分的排土场载荷对周边土体的作用进行叠加,引入广义 Kelvin 三轴蠕变模型,推导了具有流变特性的黏弹性软弱基底排土场周边地表变形解析方法,为研究排土场载荷作用下周边地表变形时空演化规律奠定理论基础。

2) 将黏弹性基底排土场周边地表变形解析方法应用于歪头山铁矿下盘排土场工程实际,获得的周边地表变形预测解析结果与现场监测数据基本吻合,验证了方法的合理性;随着距坡脚距离增大,排土场周边地表变形逐渐减小;地表变形与相邻墩台沉降差均随着时间的推移不断增大,在短时间达到峰值,之后趋于稳定。

3) 在加载阶段,随着距离坡脚的增加,排土场周边地表变形的变化趋势可以用反比例曲线来描述,即变形随距离的增加而减小,但下降速率逐渐减缓,并且当边坡高度或边坡角增大时,地表变形会随之增大;当排土场压实稳固进入蠕变阶段,周边地表变

形会在 1~2 个月内达到峰值,之后趋于稳定;运用本文预测方法,可指导水平层状基底排土场形态设计,保障周边设施安全。

参考文献(References):

- [1] K. TERASAWA. On the Elastic Equilibrium of a semi-infinite Elastic solid[J]. Coll. of sc. Imperial University of Tokyo, 1916(12): 35-37.
- [2] IX. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, 1929, 228(659-669): 377-420.
- [3] ACUM W E A, FOX L. Computation of load stresses in a three-layer elastic system[J]. Géotechnique, 1951, 2(4): 293-300.
- [4] ХРУСТАЛЕВ А Ф, КОГАН Б И. Об одной граничной задаче для бигармонического уравнения, встречающейся в теории упругости[J]. Известия высших учебных заведений. Математика, 1958(3): 241-247.

- [5] DE JONG D L, PEUTZ M G F, KORSWAGEN A R. Layered Systems under Normal and Tangential Surface Loads—‘BISAR’ Computer Program[R]. Koninklijke/Shell Laboratorium, Amsterdam: External Report AMSR, 1973.
- [6] 朱照宏. 路面力学计算[M]. 北京: 人民交通出版社, 1985.
- [7] 吴晋伟. 多层路面的应力分析[J]. 中南公路工程, 1983, 8(2): 73–92.
- WU Jinwei. Stress analysis of multi-layer pavement[J]. Central South Highway Engineering, 1983, 8(2): 73–92.
- [8] 梁锡三. 多层弹性体系应力与位移的计算[J]. 力学学报, 1978, 10(3): 202–209.
- LIANG Xisan. Calculation of stress and displacement of multilayer elastic system[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1978, 10(3): 202–209.
- [9] 王凯. 层状弹性体系理论及其在半刚性基层沥青路面分析中的应用[J]. 中国公路学报, 1990, 3(4): 32–41, 13.
- WANG Kai. Theory of elastic layered system and its application to the analysis of asphalt pavement with semi-rigid type base[J]. China Journal of Highway and Transport, 1990, 3(4): 32–41, 13.
- [10] 王凯. N 层弹性体系在多圆向心水平荷载作用下的力学计算[J]. 重庆交通学院学报, 1984, 3(2): 50–64.
- WANG Kai. Calculation of stresses, strains and displacements in an N-layered elastic system under the multiple inward horizontal loads on circular areas[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 1984, 3(2): 50–64.
- [11] 王凯, 姚炳卿. N 层弹性体系在多圆旋转水平荷载作用下的力学计算[J]. 长安大学学报(自然科学版), 1986(3): 15–30.
- WANG Kai. YAO Bingqing. Mechanical calculation of N-layer elastic system under multi-circle rotating horizontal load[J]. Journal of Xi'an Highway University, 1986(3): 15–30.
- [12] 王凯. N 层弹性体系在多圆均布复合荷载作用下的力学计算[J]. 土木工程学报, 1986, 19(1): 55–71.
- WANG Kai. Static calculation of n-layer elastic system under combined loads uniformly distributed on circular areas[J]. China Civil Engineering Journal, 1986, 19(1): 55–71.
- [13] KAI W. Analysis and calculation of stresses and displacements in layered elastic systems[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1987, 3(3): 251–260.
- [14] 姜朋明, 陈光敬. 粘弹性层状地基轴对称问题的求解[J]. 工程力学, 1999, 16(5): 77–82.
- JIANG Pengming, CHEN Guangjing. Solutions of axisymmetric problems of layered visco-elastic body[J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(5): 77–82.
- [15] 支喜兰, 江晓霞, 沙爱民. 路面基层振动压实作用下的底基层应力[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2003, 23(3): 33–36.
- ZHI Xilan, JIANG Xiaoxia, SHA Aimin. Pavement subbase course stress by vibrating compaction on course[J]. *Journal of Xi'an Highway University*, 2003, 23(3): 33–36.
- [16] 吕惠卿, 张湘伟, 成思源. 水泥混凝土路面力学性能研究综述[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2005, 28(6): 60–63, 105.
- LV Huiqing, ZHANG Xiangwei, CHENG Siyuan. Study on mechanical properties of cement concrete pavements[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 2005, 28(6): 60–63, 105.
- [17] 杨国良, 王端宜, 张肖宁. 应用弯沉盆反算土基回弹模量[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2009, 41(8): 137–141.
- YANG Guoliang, WANG Duanyi, ZHANG Xiaoning. Backcalculation of subgrade resilient modulus using deflection basin[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2009, 41(8): 137–141.
- [18] 艾智勇, 刘鹏, 成怡冲. 轴对称荷载作用下层状黏弹性体系的解析层元解[J]. 中国科技论文在线, 2011, 6(11): 792–796.
- AI Zhiyong, LIU Peng, CHENG Yichong. Solution of analytical layer element for visco-elastic multilayered system under axisymmetrical loading[J]. Sciencepaper Online, 2011, 6(11): 792–796.
- [19] 阳恩慧, 艾长发, 邱延峻. 采用刚度矩阵法的弹性层状体系数值解法[J]. 交通运输工程学报, 2014, 14(4): 14–24.
- YANG Enhui, AI Changfa, QIU Yanjun. Numerical method of multi-layer elastic system by using stiffness matrix method[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2014, 14(4): 14–24.
- [20] 刘光伟, 郭伟强, 杜涵, 等. 露天煤矿内排土场填方体变形规律研究[J]. 安全与环境学报, 2023, 23(9): 3081–3089.
- LIU Guangwei, GUO Weiqiang, DU Han, et al. Study on the deformation law of the fill body of the internal waste dump in the open-pit mine[J]. Journal of Safety and Environment, 2023, 23(9): 3081–3089.
- [21] 毕仲辉, 张燎军, 翟亚飞, 等. 层状边坡的地震动输入方法研究[J]. 水资源与水工程学报, 2021, 32(4): 214–220.
- BI Zhonghui, ZHANG Liaojun, ZHAI Yafei, et al. Seismic input method of layered slopes[J]. *Journal of Water Resources and Water Engineering*, 2021, 32(4): 214–220.
- [22] 曹博, 黄云龙, 张院生, 等. 承载河道下高大内排土场沉降蠕变三维反演分析[J]. 安全与环境学报, 2022, 22(3): 1306–1314.
- CAO Bo, HUANG Yunlong, ZHANG Yuansheng, et al. Three dimensional back analysis on creep settlement of large inner dump with a river channel[J]. Journal of Safety and Environment, 2022, 22(3): 1306–1314.
- [23] 秦哲, 刘永德, 逢文龙, 等. 不同峰前卸荷与循环浸水作用后的黄砂岩再承载蠕变特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2024, 43(2): 358–370.
- QIN Zhe, LIU Yongde, PANG Wenlong, et al. Reloading experimental research on the creep properties of yellow sandstone samples considering pre-peak unloading and cyclic water intrusion damage[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2024, 43(2): 358–370.

- [24] 周瑞鹤, 程桦, 蔡海兵, 等. 三轴压缩分级卸荷条件下粉砂岩蠕变特性及蠕变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2022, 41(6): 1136–1147.
ZHOU Ruihe, CHENG Hua, CAI Haibing, et al. Creep characteristics and creep model of siltstone under triaxial compression and graded unloading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2022, 41(6): 1136–1147.
- [25] 王凯. 层状弹性体系的力学分析与计算[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2016.
- [26] 吴家龙. 弹性力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2016: 137–164.
- [27] 严作人. 弹粘性半空间体的力学分析[J]. 同济大学学报, 1987, 15(2): 50–59.
YAN Zuoren. Stress and displacement analysis of semi-infinite viscoelastic system[J]. Journal of Tongji University, 1987, 15(2): 50–59.
- [28] 严作人. 弹粘性层状体系的力学分析[J]. 同济大学学报, 1988, 16(4): 473–484.
YAN Zuoren. Mechanical analysis of viscoelastic multi-layered systems[J]. Journal of Tongji University, 1988, 16(4): 473–484.
- [29] 国家铁路局. 高速铁路设计规范: TB 10621—2014[S]. 北京: 中国铁道出版社, 2015.
- [30] 国家铁路局. 铁路桥涵设计规范: TB 10002—2017[S]. 北京: 中国铁道出版社, 2017.